

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа

7. 2. 2026.

VIII разред

1. Одреди све реалне бројеве x који задовољавају обе неједначине:

$$\frac{x}{6} - \frac{1-x}{4} \leq \frac{1+x}{3} + \frac{x-2}{24} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{3} - \frac{x+1}{6} - \frac{1-3x}{2} > 5.$$

2. У правоуглом троуглу, чија је површина једнака 96 cm^2 , хипотенуза и дужа катета су у односу $5 : 4$. Одреди површину њему сличног троугла чија је хипотенуза дужине 15 cm .
3. Дужа дијагонала правилне шестостране призме дужине $10\sqrt{2} \text{ cm}$ нагнута је према равни основе под углом од 45° . Израчунај површину те призме.
4. Нека је $x = 202620252024$. Докажи да је број $x^2 - 2x - 3$ дељив са 15 , али није дељив са 2025 .
5. Ана, Беба и Цеца играле су игру са жетонима тако да свака од њих у свом потезу ставља одређени број жетона на сто, који је на почетку игре празан (без жетона). Ана увек додаје по 2 жетона, Беба додаје по 3 жетона, а Цеца додаје по 5 жетона. Када су све три одиграле укупно 102 потеза, на столу је било 305 жетона. На колико начина ово може да се уради, ако је свака од њих одиграла бар један потез? Редослед потеза није битан.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 120 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Прва неједначина је еквивалентна са $x \leq 12$, па има скуп решења $(-\infty, 12]$ [8 бодова]. Друга неједначина је еквивалентна са $x > 4$, па има скуп решења $(4, +\infty)$ [8 бодова]. Сви реални бројеви који задовољавају обе неједначине дати су са $4 < x \leq 12$, тј. $x \in (4, 12]$ [4 бода].

2. (МЛ 60/1) Нека је дужина хипотенузе овог троугла $c = 5k$, а катете $b = 4k$, за неки позитиван реалан број k [2 бода]. Друга катета има дужину $a = \sqrt{(5k)^2 - (4k)^2} = 3k$ [2 бода]. Из формуле за површину

правоуглог троугла и услова задатка, добијамо $P = \frac{ab}{2} = 6k^2 = 96 \text{ cm}^2$

[3 бода], па је $k = 4 \text{ cm}$ [2 бода] и странице троугла су $a = 12 \text{ cm}$, $b = 16 \text{ cm}$ и $c = 20 \text{ cm}$ [3 бода]. Одговарајуће странице њему сличног троугла су катете a_1 , b_1 и хипотенуза $c_1 = 15 \text{ cm}$. Из сличности ових

троуглова имамо $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$ [2 бода], одакле заменом бројевних

вредности добијамо $a_1 = 9 \text{ cm}$ [2 бода], $b_1 = 12 \text{ cm}$ [2 бода]. Површина сличног троугла је 54 cm^2 [2 бода].

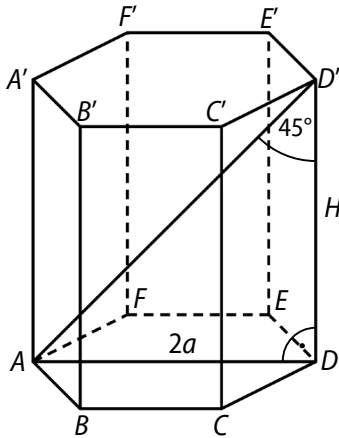
Напомена. Могуће је и, након израчунавања коефицијента сличности ових троуглова $\frac{c_1}{c} = \frac{3}{4}$, искористити да се површине сличних

троуглова односе као квадрат коефицијента сличности, па је

$$P_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 P = \frac{9}{16} \cdot 96 \text{ cm}^2 = 54 \text{ cm}^2.$$

3. (МЛ 60/2) Посматрајмо шестострану призму $ABCDEF A' B' C' D' E' F'$, са основном ивицом a и висином H , чија дужа дијагонала заклапа угао од 45° са равни основе. То значи да, на пример, дијагонала AD' заклапа угао од 45° са равни шестоугла $ABCDEF$ у основи, па је $\sphericalangle D'AD = 45^\circ$ [5 бодова] јер је D нормална пројекција тачке D' на раван основе, па је AD нормална пројекција праве AD' на раван основе. Самим тим је троугао ADD' једнакокрано-правоугли [2 бода], са

хипотенузом $AD' = 10\sqrt{2}$ cm и катетама $AD = DD' = 10$ cm [2 бода]. Како је дужа дијагонала шестоугла $AD = 2a$ [2 бода] и $DD' = H$ (висина призме), добијамо $a = 5$ cm [1 бод] и $H = 10$ cm [1 бод]. Површина базе призме је површина правилног шестоугла странице $a = 5$ cm и висине $B = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} = \frac{75\sqrt{3}}{2}$ cm² [2 бода], површина омотача је $M = 6aH = 300$ cm² [2 бода], па је површина призме $P = 2B + M = (300 + 75\sqrt{3})$ cm² = $75 \cdot (4 + \sqrt{3})$ cm² [3 бода].



4. Да бисмо доказали да је број $N = x^2 - 2x - 3$ дељив са $15 = 3 \cdot 5$, довољно је да докажемо да је дељив и са 3 и са 5 [2 бода]. Примети-мо да је $N = x^2 - 2x - 3 = x^2 - 3x + x - 3 = x(x - 3) + (x - 3) = (x - 3)(x + 1)$ [4 бода]. Како је $x = 202620252024$, збир цифара броја x је 27, па је број x дељив са 3 [2 бода] и са 9 [2 бода]. Тада је и $x - 3$ дељив са 3, па је N дељив са 3 [2 бода] (јер је дељив са $x - 3$). Такође, број $x + 1$ је дељив са 5 јер се завршава цифром 5, па је и N дељив са 5 [2 бода] (јер је дељив са $x + 1$). Како је број x дељив са 9, то број $N = x(x - 2) - 3$ није дељив са 9 [2 бода] (даје остатак 6 при дељењу са 9). Међутим, број 2025 је дељив са 9 [2 бода], па самим тим број N не може да буде дељив са 2025 [2 бода].

5. Означимо бројеве Аниних, Бебиних и Цециних потеза редом са a, b, c . Из услова задатка имамо релације $a + b + c = 102$ [1 бод] и $2a + 3b + 5c = 305$ [1 бод]. Одавде је $2a + 2b + 2c = 204$, па је $b + 3c = 2a + 3b + 5c - (2a + 2b + 2c) = 305 - 204 = 101$ [5 бодова]. Добијена линеарна Диофантова једначина $b + 3c = 101$ има цело-бројна решења облика $b = 101 - 3k, c = k$ [5 бодова]. Ови бројеви су природни за вредности $k \in \{1, \dots, 31, 32, 33\}$ [2 бода], што је укупно 33 могућности. Остаје још да проверимо да ли је a природан број (а не само цео број). Ово важи због $a = 102 - b - c = 102 - (101 - 3k) - k = 2k + 1$ [2 бода], па је $a = 2k + 1 \geq 3$ [2 бода]. Према томе, задатак има 33 решења [2 бода].