Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
Окружно такмичење из математике ученика основних школа
8. 3. 2026.

VIII разред

1. Сања, Ана и Бојана су штеделе новац како би сакупиле џепарац за екскурзију. Бојана је уштедела 1600 динара више од Ане, а Сања 45% мање него што би Ана имала када би јој Бојана дала половину свог износа. Ако су укупно уштеделе 24640 динара, колико је уштедела свака од њих?

2. У правоуглом координатном систему xOy дат је једнакокраки троугао OAB, тако да је мера угла AOB једнака 120°, координате тачке A су (0, 8), док је тачка B у трећем квадранту.
а) Одреди координате тачке B.
б) Израчунај обим и површину троугла OAB.
в) Израчунај растојање тачке O од праве AB.

3. Одреди колико има различитих целих бројева n за које је број $\dfrac{2n^2-2026}{n+3}$ такође цео број.

4. Правилна шестострана пирамида $SABCDEF$ (са врхом S) има основну ивицу дужине $a = 6$ cm и све њене бочне стране нагнуте су према равни основе под углом од 60°. На бочној ивици SF изабрана је тачка G тако да је $SG : GF = 2 : 1$. Израчунај запремину пирамиде $CDFG$.

5. На колико начина је могуће распоредити 12 ученика и то 3 ученика из школе A, 2 ученика из школе B, 1 ученика из школе C и 6 ученика из школе D, у 3 различита аутобуса, по 4 ученика у сваком, ако за ученике из школе A, B, C важи: никоја два ученика из различитих школа не могу да буду у истом аутобусу?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

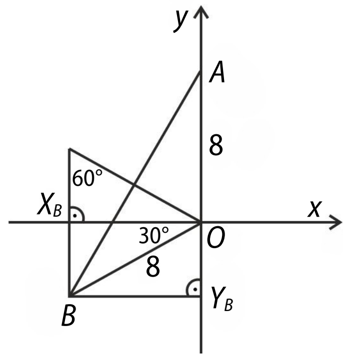
1. Нека је x износ који је уштедела Ана. Тада је Бојана уштедела $x + 1600$ динара [**2 бода**]. Ако би Бојана дала Ани половину свог новца, Ана би имала $x+\frac{1}{2}(x+1600)=\frac{3}{2}x+800$ динара [**5 бодова**]. Сања је уштедела 45% мање од тог износа, што значи да има 55% тог износа, односно $0{,}55\cdot\left(\frac{3}{2}x+800\right)=\frac{33}{40}x+440$ динара [**5 бодова**].

Оне су укупно уштеделе $x+x+1600+\frac{33}{40}x+440=24640$ динара [**2 бода**], одакле је $\frac{113}{40}x=22600$, односно $x = 8000$. Ана је уштедела 8000 динара [**2 бода**], Бојана је уштедела $8000 + 1600 = 9600$ [**2 бода**] динара, а Сања је уштедела $\frac{33}{40}\cdot 8000+440=7040$ динара [**2 бода**].

2. а) У једнакокраком троуглу OAB, мера угла AOB је 120°, па мора бити $BO = AO = 8$ [**1 бод**]. Нека су подножја нормала из B на x-осу и y-осу редом тачке X_B и Y_B. У правоуглом троуглу BX_BO је $\measuredangle BOX_B=\measuredangle BOA - \measuredangle X_BOA = 120° - 90° = 30°$ односно троугао BX_BO је половина једнакостраничног троугла странице $a = 8$ [**1 бод**]. Тада је дужина дужи BX_B половина дужине странице a, односно $OY_B = BX_B = \frac{a}{2} = 4$ [**2 бода**], а дуж X_BO је висина тог једнакостраничног троугла па је $X_BO = \frac{a\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ [**2 бода**]. Сада закључујемо да су x-координата и y-координата тачке B редом једнаке $0-4\sqrt{3}=-4\sqrt{3}$ [**1 бод**] и $0 - 4 = -4$ [**1 бод**], односно $B(-4\sqrt{3},-4)$.

б) Применом Питагорине теореме на правоугли троугао ABY_B добијамо дужину странице AB:

$AB^2=AY_B^2+BY_B^2=(8+4)^2+(4\sqrt{3})^2=144+48=192$, па је $AB=8\sqrt{3}$ [**3 бода**]. Обим троугла OAB једнак је $O = AO + BO + AB = 8 + 8 + 8\sqrt{3} = 16 + 8\sqrt{3} = 8\cdot(2+\sqrt{3})$ [**2 бода**]. Површина троугла OAB једнака је



$$P=P_{\triangle ABY_B}-P_{\triangle OBY_B}=\frac{AY_B\cdot BY_B}{2}-\frac{OY_B\cdot BY_B}{2}=\frac{12\cdot 4\sqrt{3}}{2}-\frac{4\cdot 4\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}-8\sqrt{3}$$

$=16\sqrt{3}$ [**3 бода**].

Други начин: $P=\frac{OA\cdot BY_B}{2}=\frac{8\cdot 4\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}$.

в) Растојање тачке O од праве AB је дужина висине из тачке O на страницу AB у троуглу OAB. Површина троугла је $16\sqrt{3}=\frac{h\cdot AB}{2}$, одакле је $h\cdot AB=32\sqrt{3}$, односно $h=\frac{32\sqrt{3}}{8\sqrt{3}}=4$ [**4 бода**].

Други начин. У једнакокраком троуглу BAO је $\measuredangle BAO=\frac{180^\circ-120^\circ}{2}=30^\circ$, па је висина насрам угла од 30° у правоуглом троуглу једнака половини дужине странице $h = 4$ [**4 бода**].

3. Трансформишимо дати израз

$$\frac{2n^2-2026}{n+3}=\frac{2n^2+6n-6n-18-2008}{n+3}=\frac{2n(n+3)-6n(n+3)-2008}{n+3}$$

$$=\frac{(n+3)(2n-6)-2008}{n+3}=2n-6-\frac{2008}{n+3}\quad [\textbf{10 бодова}].$$

Пошто је $2n - 6$ увек цео број, разломак ће бити цео само ако је $\frac{2008}{n+3}$ цео број, што значи да $n + 3$ мора бити целобројни делилац броја 2008 [**2 бода**]. Дакле, $n + 3$ припада скупу {−2008, −1004, −502,

–251, –8, –4, –2, –1, 1, 2, 4, 8, 251, 502, 1004, 2008} који има 16 бројева, па је n елемент скупа {–2011, –1007, –505, –254, –11, –7, –5, –4, –2, –1, 1, 5, 248, 499, 1001, 2005}, према томе одговор је 16 [**8 бодова** – свака два тачна решења по 1 бод].

Други начин. Како је број $2008 = 8 \cdot 251 = 2^3 \cdot 251^1$, то је број његових позитивних делилаца једнак $(3 + 1) \cdot (1 + 1) = 4 \cdot 2 = 8$, а целих делилаца $8 \cdot 2 = 16$. За сваки делилац d броја 2008 добијамо тачно једну вредност $n = d - 3$. Дакле, постоји 16 различитих целих бројева n [**8 бодова**].

4. Висина пирамиде $SABCDEF$ је SO, где је тачка O центар правилног шестоугла $ABCDEF$. Ако је M средиште неке странице шестоугла, на пример странице BC, из услова задатка имамо $\measuredangle OMS = 60°$ [**2 бода**], па је у правоуглом троуглу SOM, страница OM висина једнакостраничног троугла BOC, односно $OM = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2}\text{cm} = 3\sqrt{3}\ \text{cm}$ [**2 бода**]. Троугао SOM је половина једнакостраничног троугла странице $2OM = 6\sqrt{3}\ \text{cm}$, па је SO као висина тог троугла једнака $SO = \frac{6\sqrt{3}\ \text{cm} \cdot \sqrt{3}}{2} = 9\ \text{cm}$ [**2 бода**].

Основа пирамиде $CDFG$ је троугао CDF чија је страница $CF = 2a = 12\text{cm}$ [**1 бод**], а њој одговарајућа висина h из темена D је и висина једнакостраничног троугла OCD странице a, па је $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2}\ \text{cm} = 3\sqrt{3}\ \text{cm}$ [**2 бода**], и површина основе пирамиде је

$$B = \frac{CF \cdot h}{2} = \frac{12\ \text{cm} \cdot 3\sqrt{3}\ \text{cm}}{2} = 18\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \text{ [**2 бода**].}$$

Површину троугла CDF могли смо да израчунамо и ако приметимо да су његови унутрашњи углови $\measuredangle FCD = 60°$, $\measuredangle CFD = 30°$ і $\measuredangle CDF = 90°$, а странице $CD = 6\ \text{cm}$ и $DF = a\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\ \text{cm}$.

Подножје N висине $H = GN$ пирамиде $CDFG$ припада дужи CF јер је нагиб равни троугла FSC према равни основе 90° [**2 бода**]. Правоугли троуглови FGN и FSO са заједничким углом GFN су слични [**2 бода**] па је $GN : SO = FG : FS = 1 : 3$ [**2 бода**], па је $GN = \frac{1}{3}SO = 3\ \text{cm}$, односно $H = 3\ \text{cm}$ [**1 бод**]. Коначно, тражена запремина пирамиде $CDFG$ је

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3} \cdot 18\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \cdot 3\ \text{cm} = 18\sqrt{3}\ \text{cm}^3 \text{ [**2 бода**].}$$

5. (**МЛ 60/1**) Из услова задатка је јасно да сви ученици из школе A морају бити у једном аутобусу, сви ученици из школе B у другом и сви ученици из школе C у трећем аутобусу [**4 бода**]. Према томе, довољно је за ученике ове три школе само одабрати аутобусе на $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ начина [**3 бода**] и још са њима распоредити одговарајући број ученика из школе D.

Са ученицима из школе A бирамо једног ученика из школе D на 6 начина [**3 бода**], са ученицима из школе B бирамо 2 ученика из школе D на $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ начина [**4 бода**], док су преостала $6 - 1 - 2 = 3$ ученика из школе D аутоматски распоређени са 1 учеником из школе C у аутобусу [**2 бода**]. Према томе тражени број је $6 \cdot 6 \cdot 10 = 360$ [**4 бода**].

Други начин. Ученике из D (има их 6) треба распоредити у групе величина 1, 2 и 3 по аутобусима, што се може урадити на $\frac{6!}{1! \cdot 2! \cdot 3!} = 60$ начина [**9 бодова**]. Коначно решење је $6 \cdot 60 = 360$ начина [**4 бода**].