

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

8. 3. 2026.

VII разред

1. Дати су полиноми $A = 5x^2 - 3x + 9$, $B = 2x^2 - 5x - 6$, $C = 5x^2 + x - 3$, $D = -2x + 3$. Одреди полином
 $P = (A - D) - (B - C)$.
2. Симетрала оштрог угла код темена C паралелограма $ABCD$ ($AB > AD$) сече праву AD у тачки E , при чему је $AE = 5$ cm. Израчунај дужине страница паралелограма ако је његов обим 50 cm.
3. Одредити последњу цифру следећег збира (сви непарни бројеви у основи имају експонент 2026, док сви парни бројеви у основи имају експонент 2025)
 $1^{2026} + 2^{2025} + 3^{2026} + 4^{2025} + \dots + 2024^{2025} + 2025^{2026} + 2026^{2025}$.
4. Тачка M припада унутрашњости угла од 60° , и удаљена је од његових кракова 2 cm, односно 5 cm. Израчунај растојање тачке M од темена тог угла.
5. Колико има петоцифрених природних бројева дељивих са 3, чије су све цифре међусобно различите и припадају скупу $\{0, 1, 2, 7, 8, 9\}$?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Изrada задатака траје 150 минута.

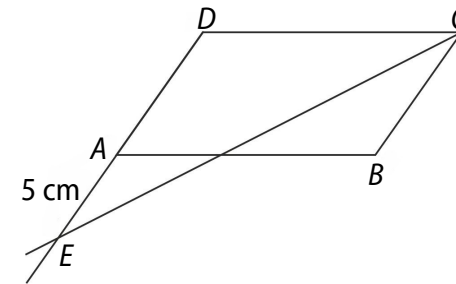
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (МЛ 60/2) Како је $A - D = 5x^2 - x + 6$ [6 бодова] и $B - C = -3x^2 - 6x - 3$ [6 бодова], то је
 $(A - D) - (B - C) = 5x^2 - x + 6 - (-3x^2 - 6x - 3) = 8x^2 + 5x + 9$ [8 бодова].

2. Оштри углови DEC и ECB су једнаки, као углови са паралелним крацима [5 бодова]. Како је $\sphericalangle ECD = \sphericalangle ECB$ јер је CE симетрала угла BCD , добијамо да је $\sphericalangle DEC = \sphericalangle DCE$, тј. троугао DCE је једнакокрак [5 бодова]. Одавде добијамо да је $CD = DE$, па је због претпоставке $CD = AB > AD$, тачка E на продужетку странице AD . Сада је $CD = DE = DA + AE = DA + 5$ cm [4 бода]. Обим паралелограма је 50 cm $= 2 \cdot (CD + DA) = 2 \cdot (2DA + 5)$ [4 бода], те су дужина странице паралелограма $DA = BC = 10$ cm и $CD = AB = 15$ cm [2 бода].



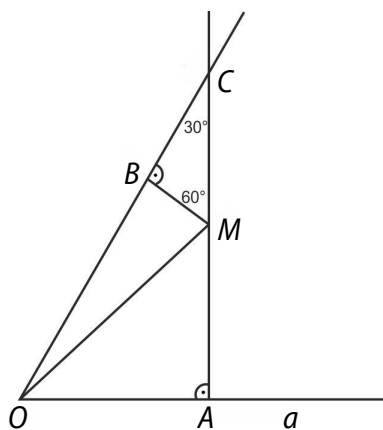
3. Цифре јединице степена бројева који се завршавају цифрама 0, 1, 5 и 6 су увек 0, 1, 5 и 6, респективно [4 бода – по 1 за сваку последњу цифру]. Једноцифрени завршеци степена бројева са цифром јединице 4 или 9 алтернирају, завршавајући се цифрама 4 и 6, односно 9 и 1, респективно. Пошто су у изразу сви парни бројеви са експонентом 2025 који је непаран, то се степени бројева са цифром јединице 4 завршавају такође цифром 4 [1 бод], док се степени бројева са цифром јединице 9 у изразу завршавају цифром 1 јер је експонент 2026 паран број [1 бод]. Цифра јединице степена бројева који се завршавају цифрама 2, 3, 7 и 8 се мењају са периодом 4. Како је $2026 = 4 \cdot 506 + 2$ и како цифра јединице степена бројева са цифром јединице 3 може бити 3, 9, 7 и 1, закључујемо да се степени бројева у изразу са цифром јединице 3 у основи завршавају са 9 [2

бода], а цифре јединица степена бројева са цифром јединице 7 у основи могу бити 7, 9, 3 и 1, те 2026. степен има цифру јединице 9 [2 **бода**]. Како је $2025 = 4 \cdot 506 + 1$ и како су 2, 4, 8 и 6, редом, цифре јединице степена са последњом цифром 2, а 8, 6, 4 и 2 редом цифре јединица за степене са последњом цифром 8, закључујемо да се сви степени бројева у изразу који се завршавају цифром 2 имају цифру јединице 2 [2 **бода**], а сви степени бројева у изразу који се завршавају цифром 8 имају цифру јединице 8 [2 **бода**]. Стога је цифра јединице збира уочених степена у оквиру сваке десетице једнака 5 ($0 + 1 + 2 + 9 + 4 + 5 + 6 + 9 + 8 + 1 = 45$) [2 **бода**].

У изразу од 1 до 2020 имамо 202 десетице, па је цифра јединице једнака 0 ($202 \cdot 5 = 1010$) [2 **бода**]. Последња цифра преосталог дела изрази $2021^{2026} + 2022^{2025} + 2023^{2026} + 2024^{2025} + 2025^{2026} + 2026^{2025}$ је 7 ($1 + 2 + 9 + 4 + 5 + 6 = 27$), па је 7 тражена последња цифра [2 **бода**].

4. Нека је дат $\sphericalangle aOb = 60^\circ$ и нека су редом A и B подножја нормала из тачке M на полуправе Oa и Ob , при чему је $MA = 5$ cm, $MB = 2$ cm.

Први начин. Означимо са C пресек праве MA и полуправе Ob . Оштри углови $\sphericalangle AOB = 60^\circ$ и $\sphericalangle CMB$ имају нормалне краке, па имају исту меру, одакле је $\sphericalangle CMB = 60^\circ$ [2 **бода**]. Према томе, правоугли троугао MBC има оштре углове чије су мере 30° и 60° , па представља половину



једнакостраничног троугла странице MC [2 **бода**]. Како је катета $MB = 2$ cm наспрам угла од 30° у овом правоуглом троуглу, то је његова хипотенуза $MC = 2MB = 4$ cm [4 **бода**]. Сада је $AC = AM + MC = 5$ cm + 4 cm = 9 cm [1 **бод**]. Правоугли троугао OAC такође има оштре углове $\sphericalangle AOC = 60^\circ$, $\sphericalangle ACO = 30^\circ$, па и он представља половину

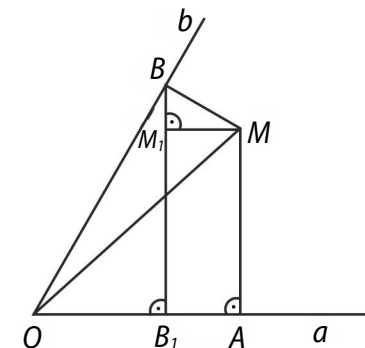
једнакостраничног троугла странице OC [1 **бод**]. Дуж AC је висина тог троугла, одакле је $AC = \frac{OC\sqrt{3}}{2}$ [2 **бода**]. Заменом добијених

бројевних вредности, имамо 9 cm = $\frac{OC\sqrt{3}}{2}$, па је хипотенуза $OC =$

$6\sqrt{3}$ cm [4 **бода**], а краћа катета $OA = \frac{1}{2}OC = 3\sqrt{3}$ cm [2 **бода**]. При-

меном Питагорине теореме на правоугли троугао OAM , добијамо $OM = \sqrt{OA^2 + MA^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 5^2}$ cm = $\sqrt{52}$ cm = $2\sqrt{13}$ cm [2 **бода**].

Други начин. Са B_1 означимо подножје нормале из тачке B на крак Oa и уочимо да је троугао OB_1B правоугли троугао са правим углом код темена B_1 и $\sphericalangle BOB_1 = 60^\circ$, те је $OB = 2OB_1$ [4 **бода**]. Са M_1 означимо подножје висине из тачке M на страницу BB_1 четвороугла (трапеза) BB_1AM . Углови троугла BMM_1 су $\sphericalangle BM_1M = 90^\circ$, $\sphericalangle MBM_1 = \sphericalangle MBO} - \sphericalangle B_1BO} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ и



$\sphericalangle M_1MB = 30^\circ$, те је из Питагорине теореме $M_1M = \frac{\sqrt{3}}{2}BM = \sqrt{3}$ cm [6

бодова]. Посматрајући два правоугла троугла OAM и OMB уочавамо да је дуж OM хипотенуза у оба троугла, па се може израчунати коришћењем Питагорине теореме из $OM^2 = OB^2 + BM^2 = OA^2 + AM^2$ [2 **бода**]. Узимајући у обзир претходно уочене односе, то је $4OB_1^2 + 4$ cm² = $(OB_1 + \sqrt{3})^2 + 25$ cm², тј. $3OB_1^2 - 2\sqrt{3}$ cm \cdot $OB_1 - 24$ cm² = 0. Трансформацијом ове једнакости добијамо $(\sqrt{3}OB_1 - 1$ cm)² = 25 cm² [4 **бода**] па је $OB_1 = 2\sqrt{3}$ cm [2 **бода**], а растојање тачке M од темена угла је $OM = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 25}$ cm = $2\sqrt{13}$ cm [2 **бода**].

5. Збир датих цифара је 27, па како је потребно да петоцифрени број у чијем се запису свака од датих цифара користи највише једном буде дељив са 3, закључујемо да је у запису могуће изоставити само цифре 0 или 9 како би збир преосталих 5 цифара био дељив са 3 [5 **бодова**]. Петоцифрених бројева који су записани коришћењем сваке од цифара 1, 2, 7, 8 и 9 тачно једном има $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ [7 **бодова**], а коришћењем сваке од цифара 0, 1, 2, 7 и 8 има $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$ [7 **бодова**]. Тражених бројева је $120 + 96 = 216$ [1 **бод**].