Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

8. 3. 2026.

VI разред

1. Које сабирке треба избрисати у збиру $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$ да би збир преосталих бројева био тачно 1?

2. Дат је паралелограм $ABCD$. Дијагонала AC дели оштар угао BAD на два дела који се разликују за 15°. Нормала из темена D на страницу BC сече дијагоналу AC у тачки H тако да је мера угла $\measuredangle AHD = 55°$. Одреди мере унутрашњих углова тог паралелограма. Одреди сва решења.

3. Одреди природне бројеве a, b, c тако да следећа једнакост буде тачна

$$\frac{253}{228}=1+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}}.$$

4. Одреди све вредности цифара a и b за које је број $\overline{202a}+\overline{b026}$ дељив са 36.

5. У унутрашњости једнакостраничног троугла ABC одређене су тачке P и Q тако да је $\measuredangle ABP = 30°$, $\measuredangle BAP = 45°$, $\measuredangle QAB = \measuredangle QBA = 15°$. Докажи да је $AP = AQ$.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

VI РАЗРЕД

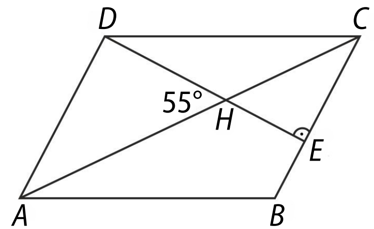
Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Најмањи заједнички садржалац за имениоце ових разломака је 120 [**5 бодова** за тачно проширивање разломака до неког заједничког имениоца], па је њихов збир [**10 бодова**]:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}=\frac{60+30+20+15+12+10}{120}=\frac{147}{120}=1\frac{27}{120}=1\frac{9}{40}.$$

Према томе, треба избрисати разломке чији је збир $\frac{27}{120}=\frac{9}{40}$, а то су разломци $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{10}$ [**5 бодова**].

2. (**МЛ 60/3**) Означимо подножје нормале из тачке D**,** на праву BC са E. Како су углови AHD и CHE унакрсни, они имају исту меру, па је $\measuredangle CHE = 55°$ [**4 бода**]. Збир углова у троуглу CHE је 180°, па је $\measuredangle HCE = 180° - \measuredangle CHE - \measuredangle HEC = 180° - 55° - 90° = 35°$ [**4 бода**]. Како су углови $\measuredangle CAD$ и $\measuredangle ACB = \measuredangle HCE$ оштри углови са паралелним крацима, они имају исту меру, па је $\measuredangle CAD = 35°$ [**4 бода**]. Из услова задатка имамо да је $|\measuredangle CAD - \measuredangle BAC| = 15°$, па на даље разликујемо два случаја:
1°) $\measuredangle BAC = 35° - 15° = 20°$, тада је $\measuredangle BAD = \measuredangle BCD = 35° + 20° = 55°$ [**2 бода**] и $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC = 180° - 55° = 125°$ [**2 бода**].
2°) $\measuredangle BAC = 35° + 15° = 50°$, тада је $\measuredangle BAD = \measuredangle BCD = 35° + 50° = 85°$ [**2 бода**] и $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC = 180° - 85° = 95°$ [**2 бода**].



3. Из датог услова добијамо да је $\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}}=\dfrac{253}{228}-1=\dfrac{25}{228}$, па је

$a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}=\dfrac{228}{25}$ [**3 бода**]. Приметимо да је $b+\dfrac{1}{c}\geq 1+\dfrac{1}{c}>1$, па је

$0<\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}<1$. Зато број a мора бити највећи природан број који је

мањи од $\dfrac{228}{25}$ [**3 бода**], а то је број 9, тј. $a=9$ [**3 бода**]. Сада добијамо

$\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}=\dfrac{228}{25}-9=\dfrac{3}{25}$, односно $b+\dfrac{1}{c}=\dfrac{25}{3}$ [**3 бода**]. Како је $c \geq 1$, то је

$0<\dfrac{1}{c}\leq 1$, па је b највећи природан број који је мањи од $\dfrac{25}{3}$ [**3 бода**],

а то је број 8, тј. $b=8$ [**3 бода**]. Коначно је $\dfrac{1}{c}=\dfrac{25}{3}-8=\dfrac{1}{3}$, па је $c=3$ [**2 бода**].

Напомена. Ако ученик добије тачан одговор $a = 9$, $b = 8$, $c = 3$, без икаквог образложења зашто је то решење и једино, може да освоји највише [**14 бодова**].

4. Број $N=\overline{202a}+\overline{b026}$ је дељив са 36 уколико је дељив са 4 и са 9 [**2 бода**]. Двоцифрени завршетак $\overline{2a}+26=46+a$ броја N је дељив са 4 једино за $a=2$ [**2 бода**] или $a=6$ [**2 бода**].

Уколико је $a = 2$, имамо $N=2022+\overline{b026}=\overline{b000}+2048=1000b+2048$ [**3 бода**]. Како број 2048 даје остатак 5 при дељењу са 9 [**1 бод**], број $\overline{b000}=1000b$ мора да даје остатак 4 при дељењу са 9 [**1 бод**], што је могуће једино уколико је $b=4$ [**2 бода**].

Уколико је $a = 6$, имамо $N=2026+\overline{b026}=\overline{b000}+2052=1000b+2052$ [**3 бода**]. Како је број 2052 дељив са 9 [**1 бод**], број $\overline{b000}=1000b$ мора такође бити дељив са 9 [**1 бод**], што је могуће једино уколико је $b=9$ [**2 бода**].

Дакле, постоје тачно два решења задатка: 2022 + 4026 и 2026 + 9026.

5. Како је $\measuredangle QAB = \measuredangle QBA = 15°$, троугао ABQ је једнакокрак, па је $AQ = BQ$ [**2 бода**]. Самим тим је права CQ уједно симетрала странице AB и симетрала унутрашњег угла у темену C, па важи $\measuredangle ACQ = 30°$ [**6 бодова**]. Такође, важи $\measuredangle CAQ = \measuredangle BAC - \measuredangle BAQ = 60° - 15° = 45°$ [**2 бода**], па су троуглови ABP и ACQ подударни (став УСУ: $AB = AC$, $\measuredangle BAP = \measuredangle CAQ = 45°$, $\measuredangle ABP = \measuredangle ACQ = 30°$) [**8 бодова**]. Из ове подударности следи $AP = AQ$ [**2 бода**].