Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

16.03.2024.

VIII разред

1. У простору је дато n тачака од којих никоје 3 нису колинеарне. Оне одређују тачно 2024 различитих равни. Одреди n.

2. Одреди линеарну функцију $y = kx + n$ чији график садржи тачку $A(0, 4)$ и са позитивним деловима координатних оса образује троугао површине 6.

3. Дат је збир
$$98! + 99! + 100!$$
Са колико нула се завршава овај збир?
Напомена. $n!$ представља производ свих природних бројева од 1 до n. На пример, $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$.

4. Одреди све природне бројеве a и b такве да је
$$a^2 - a = 4b^2 - 2b + 2024.$$

5. Дата је правилна шестострана пирамида $ABCDEFS$ чији је врх тачка S. Висина и основна ивица пирамиде су дужине 4 cm. Пирамида је пресечена равнима BDS и DFS. Израчунај површину и запремину новонастале четворостране пирамиде.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

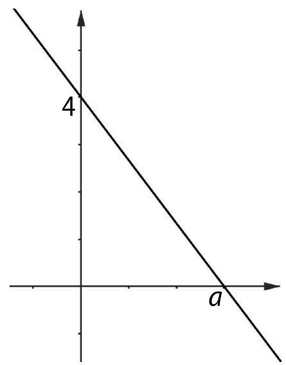
VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Најмањи број тачака потребан за дати број равни је када никоје 4 нису компланарне и у том случају оне одређују $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ равни.

Следи да је
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 2024 \text{ [\textbf{10 бодова}]},$$
односно
$$n(n-1)(n-2) = 6 \cdot 2024 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23 \text{ [\textbf{6 бода}]}.$$
Груписањем одговарајућих чинилаца, добијамо $n(n-1)(n-2) = 24 \cdot 23 \cdot 22$, одакле је $n = 24$ [**4 бода**].
Напомена. Бодовати максималним бројем бодова ако је ученик одредио број тачака у датом случају и не дискутује да ли има други решења.

2. (МЛ 56/3) График функције сече y-осу у тачки A, па је $n = 4$, тј. функција има облик $y = kx + 4$ [**4 бода**]. Како график образује троугао са позитивним деловима оса, претпоставимо да сече x-осу у тачки $B(a, 0)$, $a > 0$ [**4 бода**]. Ако са O означимо координатни почетак, тада је површина троугла OAB једнака $\dfrac{4 \cdot a}{2} = 2 \cdot a$, а како је површина 6, то је $a = 3$ [**6 бодова**]. Како график функције садржи тачку B, заменом вредности у линеарној функцији добијамо $k = -\dfrac{4}{3}$ [**6 бодова**], па функција има облик $y = -\dfrac{4}{3}x + 4$.



3. Како је
$$98! + 99! + 100! = 98! \cdot (1 + 99 + 99 \cdot 100) = 98! \cdot 10^4 \text{ [\textbf{7 бодова}]},$$
треба одредити са колико нула се завршава 98!. Он се завршава са онолико нула колико има петица у његовој факторизацији на просте чиниоце [**3 бода**]. Како је $98 = 19 \cdot 5 + 3$, то постоји 19 бројева мањих

од 98 дељивих са 5 [**3 бода**]. Како међу њима има и дељивих са 25 ($= 5^2$) и како је $98 = 3 \cdot 25 + 23$, то постоје 3 броја мања од 98 дељива са 25 [**3 бода**]. Дакле, број 98! је дељив највише са $5^{19+3} = 5^{22}$ [**2 бода**], па се $98! + 99! + 100!$ завршава са $22 + 4 = 26$ нула [**2 бода**].

4. На дату једначину можемо применити следеће трансформације:

$$a^2 - a - 4b^2 + 2b = 2024, \qquad (a^2 - 4b^2) - (a - 2b) = 2024,$$

$$(a - 2b)(a + 2b - 1) = 2024 \text{ [**7 бодова**]}.$$

Приметимо да су бројеви $a - 2b$ и $a + 2b - 1$ различите парности јер је њихов збир $2a - 1$ [**4 бода**]. Како је $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ и $a - 2b < a + 2b - 1$ [**1 бод**], разликујемо следеће случајеве:

1) $a - 2b = 1$, $a + 2b - 1 = 2024$, па је $a = 1013$, $b = 506$;
2) $a - 2b = 8$, $a + 2b - 1 = 253$, па је $a = 131$, $b = 61{,}5$, што није решење;
3) $a - 2b = 11$, $a + 2b - 1 = 184$, па је $a = 98$, $b = 43{,}5$, што није решење;
4) $a - 2b = 23$, $a + 2b - 1 = 88$, па је $a = 56$, $b = 16{,}5$, што није решење.

[Свако тачно разматрање од 1) до 4) **по 2 бода**]

Дакле, једино решење је $(a, b) = (1013, 506)$.

Напомена. Признавати и прилагодити бодовање ако ученици разматрају без неког од почетних услова (парност, однос чинилаца, ...). Да би се бодовало максималним бројем поена потребно је испитати све случајеве који могу настати.

Напомена. Почетне трансформације (првих 7 бодова у решењу) можемо урадити и на следећи начин:

$$a^2 - a = 4b^2 - 2b + 2024 \quad /\cdot 4$$

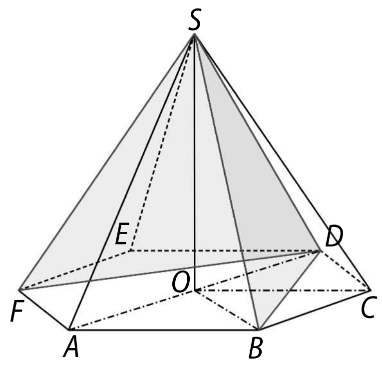
$$4a^2 - 4a = 16b^2 - 8b + 8096 \quad /+1$$

$$(2a - 1)^2 = (4b - 1)^2 + 8096 \text{ [**3 бода**]}$$

$$(2a - 4b)(2a + 4b - 2) = 8096 \text{ [**3 бода**]}$$

$$(a - 2b)(a + 2b - 1) = 2024 \text{ [**1 бод**]}.$$

5. Нова четворострана пирамида у основи има делтоид $ABDF$ чије су странице $AB = AF = 4$ cm и $BD = DF = 4\sqrt{3}$ cm [**2 бода**]. Дијагонале делтоида су $AD = 8$ cm и $BF = 4\sqrt{3}$ cm, па је површина базе $B = 16\sqrt{3}$ cm² [**3 бода**], а запремина $V = \dfrac{64\sqrt{3}}{3}$ cm³ [**3 бода**].



Бочна ивица SB једнака је $4\sqrt{2}$ cm, као хипотенуза једнакокрако-правоуглог троугла OBS [**2 бода**]. Све странице једнакокраких троуглова ABS и BDS су познате па су њихове висине, редом, $2\sqrt{7}$ cm [**2 бода**] и $2\sqrt{5}$ cm [**2 бода**]. Омотач нове пирамиде састоји се од троуглова ABS и FAS (чије су површине једнаке) и од троуглова BDS и FDS (чије су површине једнаке), па је површина омотача $2 \cdot \dfrac{4 \cdot 2\sqrt{7}}{2} + 2 \cdot \dfrac{4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 8\sqrt{7}$ [**2 бода**] $+ 8\sqrt{15}$ [**2 бода**] $= 8(\sqrt{7} + \sqrt{15})$ cm².

Дакле, површина пирамиде је $P = 8(2\sqrt{3} + \sqrt{7} + \sqrt{15})$ cm² [**2 бода**].