Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

16.03.2024.

VII разред

1. Дат је полином $P_1(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x + 6$. Збир полинома $P_1(x)$ и $P_2(x)$ једнак је $x^5 - x^2 - 2$. Одреди $P_1(x) + 2P_3(x)$ ако су $P_2(x)$ и $P_3(x)$ супротни полиноми.

2. Дати су изрази a, b и c:

$$a = 3^{2022} - 3^{2021} + 3^{2020}, \quad b = 14\sqrt{2} \cdot 3^{2020}, \quad c = 3^{2021} - 3^{2022} + 3^{2023}.$$

Докажи да a, b и c могу бити дужине страница правоуглог троугла.

3. Правоугли троугао ABC има катете дужина $AC = 12$ cm и $BC = 5$ cm. Полукруг са центром на страници AC додирује катету BC у тачки C, а хипотенузу AB у тачки D. Одреди дужину полупречника тог полукруга.

4. Колико има природних бројева n већих од 2, а мањих од 2024, таквих да је вредност израза

$$6^n + 7^n + 8^n - 789$$

дељива са 10?

5. Тачка M је средиште странице AB троугла ABC, а T је његово тежиште. Ако је троугао AMT једнакостраничан дужине странице 1 cm, одредити дужине страница троугла ABC.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Одузимањем добијамо

$$P_2(x) = x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x - 8 \text{ [**5 бодова**]}.$$

Како су $P_2(x)$ и $P_3(x)$ супротни полиноми, то је

$$P_3(x) = -x^5 + x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 8 \text{ [**5 бодова**]}.$$

Онда је $2P_3(x) = -2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 10x + 16$ [**5 бодова**], па је

$$P_1(x) + 2P_3(x) = -2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 15x + 22 \text{ [**5 бодова**]}.$$

2. (МЛ 58/2) Приметимо да је

$$a = 3^{2020} \cdot (3^2 - 3 + 1) = 7 \cdot 3^{2020} \text{ [**4 бода**]}$$

и

$$c = 3^{2021} \cdot (1 - 3 + 3^2) = 7 \cdot 3^{2021} \text{ [**4 бода**]}.$$

Како је $a < c$ и $b < c$, дати изрази могу бити дужине странице троугла, по обрнутој Питагориној теореми, ако је $a^2 + b^2 = c^2$. Како је

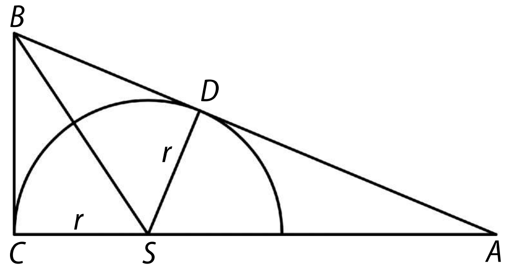
$$a^2 + b^2 = 49 \cdot 3^{4040} + 392 \cdot 3^{4040} = 441 \cdot 3^{4040} \text{ [**4 бода**]}$$

и како је

$$c^2 = 49 \cdot 3^{4042} = 49 \cdot 9 \cdot 3^{4040} = 441 \cdot 3^{4040} \text{ [**4 бода**]},$$

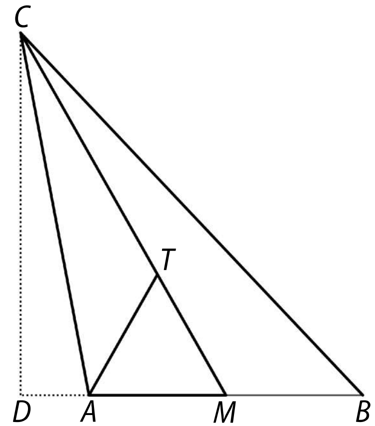
то је $a^2 + b^2 = c^2$, па a, b и c могу бити дужине страница правоуглог троугла [**4 бода**].

3. На основу Питагорине теореме је $AB = 13$ cm [**2 бода**]. Нека је S центар полукруга. Означимо $SC = SD = r$, где је r полупречник полукруга. Како полукруг додирује страницу AB у тачки D, то је $SD \perp AB$. Површина троугла ABC једнака је 30 cm^2 [**2 бода**]. Са друге стране, површина троугла ABC једнака је збиру површина троуглова CSB и SAB [**2 бода**]. Површина троугла CSB је $\frac{5\text{ cm} \cdot r}{2}$ [**4 бода**], док је површина троугла SAB једнака $\frac{13\text{ cm} \cdot r}{2}$ [**4 бода**]. Одатле је $9\text{ cm} \cdot r = 30\text{ cm}^2$, одакле добијамо $r = \frac{10}{3}$ cm [**6 бодова**].



4. Приметимо да се 6^n завршава цифром 6 са свако n [**1 бод**]. Почевши од $n = 1$, број 7^n се завршава редом цифром 7, 9, 3, 1 које се затим периодично понављају са периодом 4 [**4 бода**]. Број 8^n се завршава редом цифром 8, 4, 2, 6 које се затим периодично понављају са периодом 4 [**4 бода**]. Дакле, $6^n + 7^n + 8^n$ завршава се редом цифром: ...6 + ...7 + ...8 = ...1; ...6 + ...9 + ...4 = ...9; ...6 + ...3 + ...2 = ...1; ...6 + ...1 + ...6 = ...3 [**4 бода**]. Да би тражени број био дељив са 10, $6^n + 7^n + 8^n$ мора се завршавати цифром 9. Како је $n > 2$, то је $n \in \{6, 10, 14, ..., 2022\}$ (сваки четврти почевши од 6), тј. $n = 4k + 2$, где је $1 \leq k \leq 505$ [**5 бодова**]. Самим тим, тражених бројева има 505 [**2 бода**].

5. ***I начин***. Како је M средиште дужи AB, то је $AB = 2AM = 2$ cm [**1 бод**]. Како тежиште дели тежишну дуж у односу 2 : 1, то је $CM = 3$ cm [**3 бода**]. Нека је D подножје нормале из темена C на праву AB. Тада је троугао DMC правоугли са угловима 90°, 60°, 30°. Одатле је $CD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm [**2 бода**] и $DM = \frac{3}{2}$ cm [**2 бода**], док је $AD = \frac{1}{2}$ cm [**1 бод**] и $BD = \frac{5}{2}$ cm [**1 бод**]. Применом Питагорине теореме на троуглове DAC и DBC добијамо $AC = \sqrt{7}$ cm [**5 бодова**] и $BC = \sqrt{13}$ cm [**5 бодова**].



II начин. Као у I начину, $AB = 2$ cm [**1 бод**] и $CM = 3$ cm [**3 бода**]. Нека су A_1 и B_1 подножја нормала из темена A и B на праву CM. Тада су троуглови AMA_1 и BMB_1 правоугли са угловима 90°, 60°, 30°, при чему су странице над правим углом једнаке 1 cm. Тада је $AA_1 = BB_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm [**2 бода**], док је $MA_1 = MB_1 = \frac{1}{2}$ cm [**2 бода**]. Следи да је $CA_1 = \frac{5}{2}$ cm [**1 бод**] и $CB_1 = \frac{7}{2}$ cm [**1 бод**]. Применом Питагорине теореме на троуглове AA_1C и BB_1C добијамо да је $AC = \sqrt{7}$ cm [**5 бодова**] и $BC = \sqrt{13}$ cm [**5 бодова**].