Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

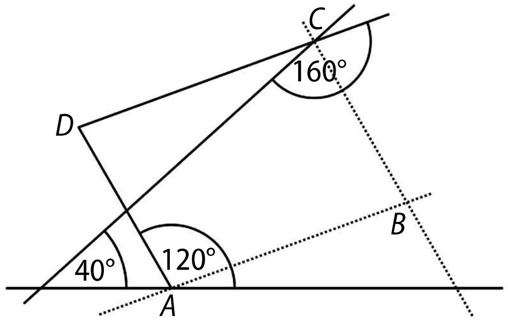
Окружно такмичење из математике ученика основних школа

16.03.2024. – VI разред

1. Израчунај вредност израза

$$\left(-2\frac{1}{4}\right):(-3)-\left(\left(\left(-\frac{3}{4}:\frac{9}{10}-1\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{9}+1\frac{5}{6}\right)-\left(-3-\frac{1}{8}\right)\right)\cdot 4.$$

2. Одреди углове паралелограма *ABCD*.



3. Марко извлачи из шешира куглице на којима су написани бројеви 0, 5, 8 и 10. Извукао је једнак број куглица са бројевима 8 и 10. Извукао је неколико куглица на којима је број 5. Број куглица на којима је број 0 једнак је четвртини укупног броја извучених куглица. Колико куглица је Марко извукао из шешира ако је збир свих бројева на куглицама које је извукао 99?

4. Конструиши правоугли троугао чији један оштар угао има меру 22° 30′, ако му је збир катета 10,5 cm.

5. Одреди све целе бројеве x за које је $\dfrac{202}{3-|1+x|}$ цео број.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

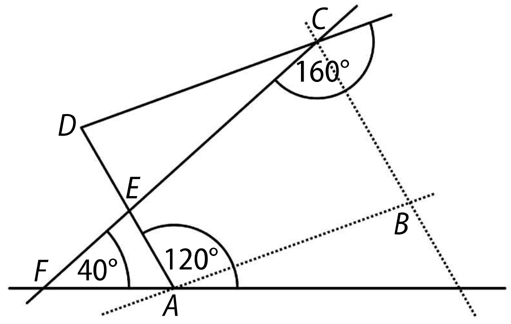
1. (МЛ 57/2)

$$\left(-2\frac{1}{4}\right):(-3)-\left(\left(\left(-\frac{3}{4}:\frac{9}{10}-1\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{9}+1\frac{5}{6}\right)-\left(-3-\frac{1}{8}\right)\right)\cdot 4$$

$$=\frac{3}{4}\ [\textbf{3 бода}]-\left(\left(\left(-\frac{5}{6}\ [\textbf{3 бода}]-3\ [\textbf{3 бода}]+\frac{11}{6}\right)+\frac{25}{8}\ [\textbf{2 бода}]\right)\cdot 4$$

$$=\frac{3}{4}-\left(-2\ [\textbf{4 бода}]+\frac{25}{8}\right)\cdot 4=\frac{3}{4}-\frac{9}{8}\ [\textbf{3 бода}]\cdot 4=\frac{3}{4}-\frac{9}{2}=-\frac{15}{4}\ [\textbf{2 бода}].$$

2. Уведимо тачке E и F као на слици. Важи да је $\measuredangle FAE = 60°$ [**4 бода**], па је $\measuredangle AEF = \measuredangle DEC = 80°$ [**4 бода**]. Како је $\measuredangle ECD = 20°$ [**4 бода**], следи да је $\measuredangle EDC = 180° - (80° + 20°) = 80°$ [**4 бода**], па закључујемо да су углови паралелограма $\measuredangle ADC = \measuredangle ABC = 80°$ [**2 бода**] и $\measuredangle DAB = \measuredangle BCD = 100°$ [**2 бода**].

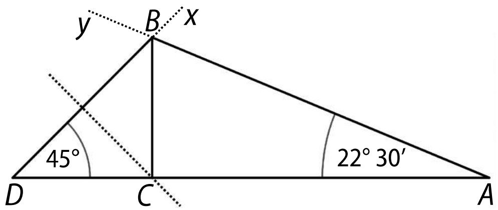


3. ***I начин***. Означимо са x број извучених куглица означених бројем 8, односно 10, а са y број извучених куглица означених бројем 5. Тада је $18x + 5y = 99$ [**4 бода**]. Како је $5y = 99 - 18x$, следи да $5 \mid (99 - 18x)$ [**3 бода**], и при томе је $0 \le x \le 5$, јер је $y \ge 0$ [**3 бода**]. Услов дељивости је испуњен само за $x = 3$ [**3 бода**], па је у том случају $5y = 45$, тј. $y = 9$ [**1 бод**]. Дакле, извучено је $2 \cdot 3 + 9 = 15$ куглица означених бројевима 8, 10 и 5, што према услову задатка представља $\frac{3}{4}$ укупног броја извучених куглица [**3 бода**], па следи да укупно извучено 20 куглица [**3 бода**].

II начин. На исти начин као у првом начину долазимо до једначине $18x + 5y = 99$ [**4 бода**]. Из једнакости $5y = 99 - 18x$ закључујемо да је лева страна дељива са 9 [**3 бода**] и да је непаран број [**2 бода**]. Стога је y непаран број који је дељив са 9 и мањи од 20 ($5y \leq 99$) [**3 бода**]. То је могуће само за $y = 9$ [**1 бод**], па је $x = 3$ [**1 бод**]. Преосталих 6 бодова као у I начину.

Напомена. Признавати и максимално бодовати ако ученик/ца констатује да је Марко морао да извуче куглице са бројевима 8 и 10 чији је укупни збир 0, 18, 36, 54, 72 или 90, па испита да ли је могућ сваки од датих случајева.

4. Анализа: Нека је дат троугао ABC и нека је, нпр. $\measuredangle CAB = 22° 30'$. Продужимо страницу AC троугла ABC преко темена C и одредимо на њој тачку D такву да је $CD = BC$ [**3 бода**]. Троугао DCB је једнакокрако-правоугли са правим углом у темену C, па је $\measuredangle BDC = 45°$ [**4 бода**], а тачка C припада симетрали основице BD овог троугла [**3 бода**]. Можемо конструисати троугао DAB, коме је позната страница $DA = DC + CA = BC + CA = 10{,}5$ cm и углови $\measuredangle BDC = 45°$ и $\measuredangle DAB = 22° 30'$ (страница и два налегла угла) [**3 бода**].
Конструкција: Конструишимо дуж $DA = 10{,}5$ cm. Конструишимо полуправу Dx која са дужи DA заклапа угао од 45° [**2 бода**], а затим и полуправу Ay која са дужи DA заклапа угао од $22° 30'$ [**2 бода**]. Теме B се налази у пресеку полуправе Dx и полуправе Ay. Теме C одређујемо у пресеку странице DA и симетрале странице BD конструисаног троугла DAB [правилна конструкција симетрале **3 бода**].



Напомена 1. Бодовати одговарајућим бројем поена ако ученик није у анализи написао неки од датих делова, али се поступком конструкције уочава употреба тврђења.

Напомена 2. Признавати и максимално бодовати ако ученик теме C одреди као подножје нормале из темена B на страницу AD (уз правилну конструкцију нормале), јер је угао ACB прав.

5. Дати израз је дефинисан када је $|1 + x| \neq 3$, тј. за $1 + x \neq 3$ и $1 + x \neq -3$, односно за $x \neq 2$ и $x \neq -4$.
Дати израз је цео број када $3 - |1 + x|$ дели 202 , тј. када $3 - |1 + x| \in \{-202, -101, -2, -1, 1, 2, 101, 202\}$ [**4 бода**].
Разликујемо следеће случајеве:
а) $3 - |1 + x| = -202$. Одавде је $|1 + x| = 205$, па је $x = 204$ или $x = -206$.
б) $3 - |1 + x| = -101$. Одавде је $|1 + x| = 104$, па је $x = 103$ или $x = -105$.
в) $3 - |1 + x| = -2$. Одавде је $|1 + x| = 5$, па је $x = 4$ или $x = -6$.
г) $3 - |1 + x| = -1$. Одавде је $|1 + x| = 4$, па је $x = 3$ или $x = -5$.
д) $3 - |1 + x| = 1$. Одавде је $|1 + x| = 2$, па је $x = 1$ или $x = -3$.
ђ) $3 - |1 + x| = 2$. Одавде је $|1 + x| = 1$, па је $x = 0$ или $x = -2$.
[За свако тачно одређено x у деловима од а) до ђ) **по 1 бод**.]
е) $3 - |1 + x| = 101$. Одавде је $|1 + x| = -98$, па у овом случају нема решења [**2 бода**].
ж) $3 - |1 + x| = 202$. Одавде је $|1 + x| = -199$, па у овом случају нема решења [**2 бода**].
Дакле, решења су: −206, −105, −6, −5, −3, −2, 0, 1, 3, 4, 103, 204.