ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа
10.02.2024.

VIII разред

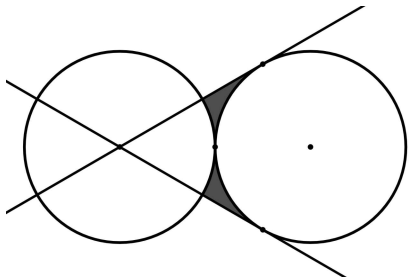
1. Израчунај вредност израза $\dfrac{2^{7n+3}\cdot 2^{6n-5}}{2^{12n}:2^{9n}}:\dfrac{2^{7n-9}\cdot 2^{5n-4}}{2^{2n-3}\cdot 2^{3}}-3\cdot 2^{3}$.

2. Основна ивица правилне шестостране призме четири пута је краћа од њене висине, а збир дужина висине и основне ивице је 30 cm. Израчунај површину и запремину те призме.

3. Раја, Гаја и Влаја желе да поделе међусобно кликере. Прво Раја узме трећину свих кликера, Гаја једну трећину остатка и Влаја једну трећину кликера преосталих након Раје и Гаје. Остатак кликера су поделили на једнаке делове. Уколико је Гаја добио 130 кликера, колико је кликера било пре деобе?

4. Вања у својој касици има само новчиће од 2 и 5 динара. На колико начина може да купи лопту која кошта 2024 динара користећи само своју уштеђевину из касице? (Подразумева се да има довољно новчића у касици за сваку комбинацију.)

5. Две кружнице једнаких полупречника додирују се споља. Из центра једне кружнице конструисане су тангенте на другу кружницу (види слику). Одреди површину осенчене фигуре, ако је полупречник једне кружнице *r*.



Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1.

$$\frac{2^{7n+3}\cdot 2^{6n-5}}{2^{12n}:2^{9n}}:\frac{2^{7n-9}\cdot 2^{5n-4}}{2^{2n-3}\cdot 2^{3}}-3\cdot 2^{3}=\frac{2^{13n-2}\ [\textbf{2 бода}]}{2^{3n}\ [\textbf{2 бода}]}:\frac{2^{12n-13}\ [\textbf{2 бода}]}{2^{2n}\ [\textbf{2 бода}]}-3\cdot 2^{3}$$

$$=2^{10n-2}\ [\textbf{2 бода}]:2^{10n-13}\ [\textbf{2 бода}]-3\cdot 2^{3}$$

$$=2^{11}\ [\textbf{2 бода}]-3\cdot 2^{3}=2^{3}\cdot(2^{8}-3)=8\cdot 253=2024\ [\textbf{6 бодова}].$$

2. (МЛ 56/5) Означимо основну ивицу призме са a, а висину са H. Из услова $H = 4a$ и $a + H = 30$ cm, добијамо $a = 6$ cm, $H = 24$ cm [**4 бода**]. Површина базе призме је површина правилног шестоугла, па је $B = 54\sqrt{3}$ cm^2 [**4 бода**], а површина омотача је $M = 6aH = 864$ cm^2 [**4 бода**]. Површина призме је $P = 2B + M = 108\cdot(\sqrt{3}+8)$ cm^2 [**4 бода**], а запремина $V = BH = 1296\sqrt{3}$ cm^3 [**4 бода**].

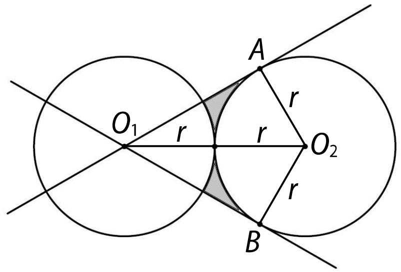
3. Означимо број кликера пре деобе са x. Раја је узео $\frac{1}{3}x$ кликера. Преостало је $\frac{2}{3}x$ кликера. Гаја је узео $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}x=\frac{2}{9}x$ кликера [**2 бода**], а преостало је $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x=\frac{4}{9}x$ кликера. Влаја је узео $\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}x=\frac{4}{27}x$ кликера [**3 бода**], а преостало је $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}x=\frac{8}{27}x$ кликера [**4 бода**]. Овај остатак поделили су на једнаке делове, па је свако добио по $\frac{8}{27}x:3=\frac{8}{81}x$ кликера [**3 бода**]. Дакле, Гаја је добио $\frac{2}{9}x+\frac{8}{81}x=\frac{26}{81}x$ кликера [**4 бода**], па је $\frac{26}{81}x=130$, одакле је $x = 405$ [**4 бода**]. Дакле, пре деобе је било 405 кликера.

4. Означимо са x и y број новчића од 2 и 5 динара утрошених током куповине. Услов задатка се своди на $2x + 5y = 2024$ [**2 бода**], при чему су x и y ненегативни цели бројеви [**2 бода**]. Како је

$$5y = 2\cdot(1012 - x)\ [\textbf{3 бода}],$$

и десна страна једнакости је паран број, то и $5y$ мора бити парно, па је y паран број [**2 бода**]. Нека је $y = 2k$, за неко $k \in N_0$ [**2 бода**] јер је $y \in N_0$. Заменом у претходној једнакости добијамо $x = 1012 - 5k$ [**4 бода**]. Дакле, свако решење је облика $(1012 - 5k, 2k)$, $k \in N_0$. Како је $x \geq 0$, то је $1012 - 5k \geq 0$, па добијамо да је $k \leq 202$ [**2 бода**], а како је $0 \leq k \leq 202$, то имамо 203 решења полазне Диофантове једначине [**3 бода**], тј. Вања може да плати лопту на 203 различита начина.

5. (МЛ 56/4) Означимо тачке као на слици. Правоугли троуглови O_1O_2A и O_1O_2B имају подударне катете $O_2A = O_2B = r$ и заједничку хипотенузу $O_1O_2 = 2r$, па су ови троуглови подударни (став ССУ), па је и четвороугао AO_1BO_2 делтоид.



У уоченим правоуглим троугловима је једна катета два пута краћа од хипотенузе па је $\measuredangle AO_1O_2 = \measuredangle BO_1O_2 = 30°$ и $\measuredangle AO_2O_1 = \measuredangle BO_2O_1 = 60°$ [**4 бода**]. Површина осенчене фигуре једнака је разлици површине P_0 делтоида AO_1BO_2 и површина P_1 и P_2 два кружна исечка: круга k_1 полупречника r са централним углом од $2 \cdot 30° = 60°$ и круга k_2 полупречника r са централним углом од $2 \cdot 60° = 120°$ [**4 бода**]. Површину делтоида рачунамо као двоструку површину једног од троуглова O_1O_2A или O_1O_2B са катетама r и $r\sqrt{3}$ (или као површину делтоида дијагонала $2r$ и $r\sqrt{3}$), па је $P_0=r^2\sqrt{3}$ [**3 бода**]. Површина кружних исечака је $P_1=\frac{1}{6}r^2\pi$ [**3 бода**] и $P_2=\frac{1}{3}r^2\pi$ [**3 бода**]. Тражена површина једнака је $P=P_0-(P_1+P_2)=r^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)$ [**3 бода**].