

# ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

## Општинско такмичење из математике ученика основних школа

10.02.2024.

### VII разред

1. Одреди цео број  $a$  и природан број  $n$ , тако да буде тачна једнакост:

$$a^n = \frac{0,125^4 \cdot (-4,5)^6 \cdot (-0,375)^6 \cdot 125}{2,25^9 \cdot 0,5^{18}}.$$

2. На колико начина се број 2024 може приказати као производ три различита природна броја? Редослед чинилаца није битан.
3. Странице троугла  $ABC$  су  $AB = 21$  cm,  $BC = 17$  cm,  $AC = 10$  cm. У унутрашњој области троугла дата је тачка  $M$  чије је растојање од странице  $AB$  једнако 2 cm, а од странице  $BC$  једнако 4 cm. Одреди растојање тачке  $M$  од странице  $AC$ .
4. Одреди све природне бројеве мање од 1000 чији је производ са бројем 7 једнак кубу неког природног броја.
5. Нека је  $D$  тачка хипотенузе  $AB$  правоуглог троугла  $ABC$ , таквог да је  $CA = CD = \sqrt{5}$  и  $CB = 2\sqrt{5}$ . Израчунај обим и површину троугла  $BCD$ .

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 120 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

## VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.  
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Како је  $0,125^4 = \left(\frac{1}{8}\right)^4 = \frac{1}{2^{12}}$  [2 бода],  $(-4,5)^6 = 4,5^6 = \left(\frac{9}{2}\right)^6 = \frac{3^{12}}{2^6}$  [2

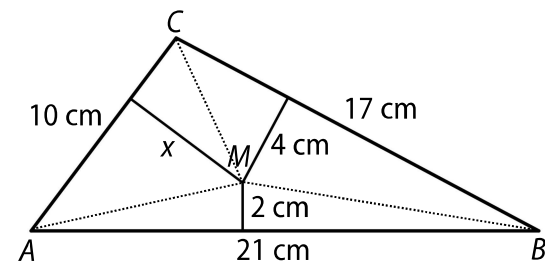
бода],  $(-0,375)^6 = 0,375^6 = \left(\frac{3}{8}\right)^6 = \frac{3^6}{2^{18}}$  [2 бода],  $125 = 5^3$  [1 бод],

$2,25^9 = \left(\frac{9}{4}\right)^9 = \frac{3^{18}}{2^{18}}$  [2 бода] и  $0,5^{18} = \left(\frac{1}{2}\right)^{18} = \frac{1}{2^{18}}$  [2 бода], то је

$$\frac{1}{2^{12}} \cdot \frac{3^{12}}{2^6} \cdot \frac{3^6}{2^{18}} \cdot 5^3 = \frac{3^{18} \cdot 5^3}{2^{36}} = 5^3 \text{ [7 бодова], па је } a = 5 \text{ [1 бод] и } n = 3 \text{ [1 бод].}$$

2.  $2024 = 1 \cdot 2^3 \cdot 11 \cdot 23$  [6 бодова]. Уочимо све производе у којима је 1 један од чинилаца. Тада је  $2024 = 1 \cdot 2 \cdot 1012 = 1 \cdot 4 \cdot 506 = 1 \cdot 8 \cdot 253 = 1 \cdot 11 \cdot 184 = 1 \cdot 22 \cdot 92 = 1 \cdot 23 \cdot 88 = 1 \cdot 44 \cdot 46$  [сваки производ по 1 бод]. Ако је 2 најмањи од чинилаца, све могућности  $2 \cdot 4 \cdot 253 = 2 \cdot 11 \cdot 92 = 2 \cdot 22 \cdot 46 = 2 \cdot 23 \cdot 44$  [сваки производ по 1 бод]. Ако је 4 најмањи од чинилаца, сви производи су  $4 \cdot 11 \cdot 46 = 4 \cdot 22 \cdot 23$  [сваки производ по 1 бод]. Ако је 8 најмањи чинилац, постоји само један производ  $8 \cdot 11 \cdot 23$  [1 бод]. За сваки нетачно наведени производ одузети по 1 бод.

3. Површину троугла  $ABC$  можемо израчунати користећи Херонов образац:  $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ , где је  $s$  полуобим троугла, тј.  $s = 24$  cm, па је  $P = \sqrt{24 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 14} = 84$  cm<sup>2</sup> [8 бодова]. Са друге стране површину троугла  $ABC$  можемо израчунати као збир површина троуглова  $ABM$ ,  $BMC$  и  $AMC$ , у којима су висине заправо растојања тачке  $M$  од страница троугла. Следи да је  $P = \frac{21 \cdot 2}{2} + \frac{17 \cdot 4}{2} + \frac{10 \cdot x}{2} = 84$  cm<sup>2</sup> [8 бодова], одакле је тражено растојање  $x = 5,8$  cm [4 бода].



4. (МЛ 57/2) Нека је  $x$  такав број. Тада је  $7x = y^3$ , за неки природан број  $y$ . Због дељивости леве стране са 7, следи да таква мора бити и десна страна, па је  $y = 7k$ , за неки природан број  $k$  [5 бодова]. Одатле следи да је  $7x = 7^3 \cdot k^3$ , односно  $x = 49 \cdot k^3$  [5 бодова]. Ако је  $k \geq 3$ , онда је  $x = 49 \cdot k^3 \geq 49 \cdot 3^3 = 1323 > 1000$ , што се противи услову задатка да је  $x < 1000$ . Дакле, важи  $k < 3$  [6 бодова]. За  $k = 1$  је  $x = 49$  [2 бода], а за  $k = 2$  је  $x = 392$  [2 бода].

5. (МЛ 58/1) Нека је  $E$  подножје висине из темена  $C$  на хипотенузу  $AB$ . На основу Питагорине теореме је  $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5$  [1 бод]. Из површине троугла  $ABC$  је  $P = \frac{AC \cdot BC}{2} = 5 = \frac{AB \cdot EC}{2} = \frac{5 \cdot EC}{2}$ , одакле следи да је  $EC = 2$  [4 бода]. Даље, из Питагорине теореме у једнакокраном троуглу  $ADC$  је  $ED = AE = \sqrt{AC^2 - EC^2} = 1$  [4 бода], па је  $BD = AB - AD = 3$  [5 бодова]. Обим троугла  $BCD$  је онда једнак  $3 + 3\sqrt{5}$  [3 бода]. Површину троугла  $BCD$  можемо добити када од површине троугла  $ABC$  одуземо површину троугла  $ACD$  и она је  $P = 5 - \frac{AD \cdot EC}{2} = 3$  [3 бода].

