ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа

10.02.2024.

VI разред

1. Ако је

$$A = 2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right) \text{ и } B = -121{,}2 : 12 - 12\frac{1}{2} \cdot 1{,}2$$

израчунај $\frac{|A+B|}{9}$.

2. Кроз средиште S дијагонале BD правоугаоника $ABCD$ конструисана је права p која сече странице AB и CD у тачкама P и Q, редом. Докажи да је $SP = SQ$.

3. Дат је разломак $\frac{2023}{2024}$. Који број треба одузети од бројиоца и додати имениоцу, да би након скраћивања добили разломак $-\frac{3}{4}$?

4. На страницама AB, AC и BC троугла ABC одабране су, редом, тачке D, E и F, такве да је $AD = AE$ и $BD = BF$. Ако је $\measuredangle EDF = 40°$, израчунај меру угла ACB.

5. Одреди најмањи могући природни број дељив са 4, чији је збир цифара једнак 2024.

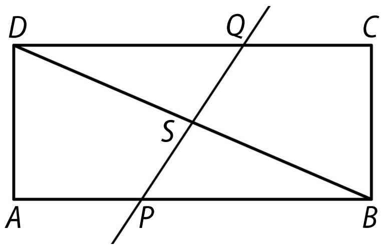
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

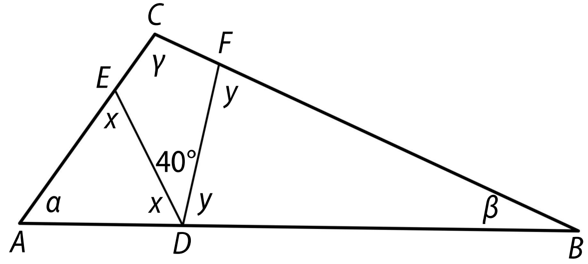
1. (МЛ 56/2) $A=2-4\cdot\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right)=2-4\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)$ [**2 бода**] $=2+\frac{3}{2}$ [**2 бода**] $=3{,}5$ [**3 бода**], $B=-121{,}2:12-12\frac{1}{2}\cdot 1{,}2=-10{,}1$ [**3 бода**] -15 [**3 бода**] $=-25{,}1$ [**2 бода**], $\frac{|A+B|}{9}=\frac{|3{,}5+(-25{,}1)|}{9}=\frac{21{,}6 \text{ [3 бода]}}{9}=2{,}4$ [**2 бода**].

2. (МЛ 56/2) Уочимо троуглове *SDQ* и *SBP*. Како је ∡*SDQ* = ∡*SBP* као углови на трансверзали [**4 бода**], ∡*DSQ* = ∡*BSP* јер су унакрсни [**4 бода**] и *BS* = *SD* јер је *S* средиште дијагонале [**1 бод**], то су троуглови *SDQ* и *SBP* подударни на основу става УСУ [**6 бодова**]. Како подударни троуглови имају једнаке одговарајуће елементе закључујемо да су странице *SP* и *SQ* међусобно једнаке [**5 бодова**].



3. Означимо тражени број са *x*. Ако одузмемо *x* од бројиоца и додамо имениоцу, добијамо једначину $\frac{2023-x}{2024+x}=-\frac{3}{4}$ (за $x\neq-2024$) [**5 бодова**], чије је решење $x=14164$ [**15 бодова**], што је и тражени број.

4. Троуглови *DEA* и *FDB* су једнакокраки (*AD* = *AE* и *BD* = *BF*) [**5 бодова**]. Нека је ∡*ADE* = *x* и ∡*BDF* = *y*. Тада је $x=\frac{180°-\alpha}{2}$ и $y=\frac{180°-\beta}{2}$. Како је *x* + *y* = 140° то је $\frac{180°-\alpha}{2}+\frac{180°-\beta}{2}=140°$ одакле је *α* + *β* = 80° [**10 бодова**]. Коначно, *γ* = 180° – (*α* + *β*) = 180° – 80° = 100° [**5 бодова**].



5. Да бисмо добили најмањи природни број потребно је да цифру 9 употребимо максималан број пута. Како је 2024 = 224 · 9 + 8, то значи да тражени број има најмање 225 цифара [**2 бода**]. Међутим, како је тај број састављен само од цифара 9 и једне осмице и како нити један од бројева 89, 98 и 99 није дељив са 4, то не постоји 225-тоцифрени број са траженим особинама [**3 бода**]. Дакле, тражени број може да има најмање 226 цифара [**2 бода**]. Да би овај број био најмањи претпоставимо да је цифра највеће месне вредности 1. Тада збир преосталих 225 цифара мора да буде 2023 [**3 бода**]. То је могуће ако су 223 цифре 9, а преостале две цифре 9, 7 или 8, 8 [**5 бодова**]. Како је међу бројевима 79, 88, 89, 97, 98 и 99 само број 88 дељив са 4, то постоји тражени 226-тоцифрени број чији је збир цифара 2024 и који је дељив са 4 и то је број $\overline{1\underbrace{99...99}_{\text{223 цифре}}88}$ [**5 бодова**].