ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа
10.02.2024.

V разред

1. Одреди све вредности природног броја x за које је тачна неједнакост

$$\frac{701}{1011} < \frac{13 \cdot x}{2022} < \frac{601}{674}.$$

2. Дато је неколико узастопних простих бројева. Одреди њихов збир ако је производ најмањег и највећег од тих бројева 589.

3. На дужи AB дате су тачке P, Q и R такве да је $A–P–Q–R–B$. Удаљеност између средишта дужи PQ и QR је 8 cm, а између средишта дужи AP и RB је 22 cm. Израчунај дужину дужи AB.

4. Природни бројеви од 1 до 2024 написани су један иза другог у низу: 123456789101112…20232024. Која цифра се налази тачно у средини тога низа?

5. Торта има облик коцке ивице 4 dm. Горња страна торте и све бочне стране премазане су шлагом. Након тога, торта је исечена на 64 парчића облика коцке ивице 1 dm, резовима паралелним странама коцке. Одреди колико има парчића торте који:
а) немају стране премазане шлагом;
б) имају једну страну премазану шлагом;
в) имају две стране премазане шлагом.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

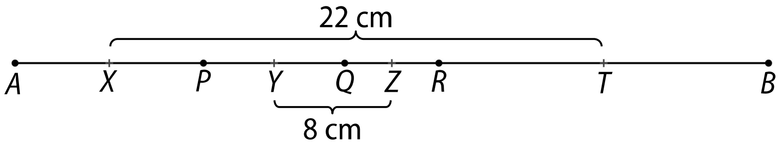
V РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (МЛ 57/2) Како је $\frac{701}{1011}=\frac{1402}{2022}$ [**2 бода**] и $\frac{601}{674}=\frac{1803}{2022}$ [**2 бода**] то је $\frac{1402}{2022}<\frac{13\cdot x}{2022}<\frac{1803}{2022}$ одакле је $1402 < 13 \cdot x < 1803$ [**4 бода**]. Из $13 \cdot x > 1402$, добијамо $x \geq 108$ [**4 бода**], а из $13 \cdot x < 1803$ добијамо $x \leq 138$ [**4 бода**]. Дакле, $x \in \{108, 109, \ldots, 137, 138\}$ [**4 бода**].

2. (МЛ 57/1) Број 589 као производ два броја можемо записати само као $589 = 1 \cdot 589 = 19 \cdot 31$. Како 1 и 589 нису прости бројеви, то је једини начин да овај број представимо као производ два проста броја $19 \cdot 31$ [**8 бодова**]. Сви прости бројеви од 19 до 31 су: 19, 23, 29, 31 [**10 бодова**], а њихов збир је $19 + 23 + 29 + 31 = 102$ [**2 бода**].

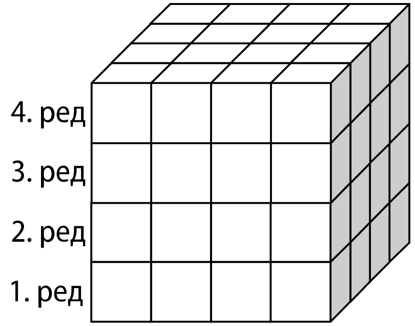
3. Нека су X, Y, Z, T редом средишта дужи AP, PQ, QR и RB.



Како је $YZ = YQ + QZ = 8$ cm, то је $PR = PQ + QR = 2 \cdot YQ + 2 \cdot QZ = 2 \cdot (YQ + QZ) = 2 \cdot YZ = 16$ cm [**6 бодова**]. Како је $XT = XP + PR + RT = 22$ cm, то је $XP + RT = 6$ cm [**3 бода**]. Сада је $AP + RB = 2 \cdot (XP + RT) = 12$ cm [**6 бодова**], па је $AB = AP + RB + PR = 28$ cm [**5 бодова**].

4. Међу бројевима од 1 до 2024 има 9 једноцифрених, 90 двоцифрених, 900 троцифрених и 1025 четвороцифрених бројева [**2 бода**]. Они се записују помоћу $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 1025 \cdot 4 = 6989$ цифара [**5 бодова**]. Дакле, потребно је одредити цифру на 3495. месту у овом низу [**3 бода**]. За запис једноцифрених, двоцифрених и троцифрених бројева потребно је 2889 цифара. Како је $3495 - 2889 = 606$ и како је $606 : 4 = 151$ (остатак 2), онда ће 3495. цифра бити 2. цифра 152. четвороцифреног броја [**5 бодова**]. Број 1151 је 152. четвороцифрени број [**3 бода**], па је тражена цифра 1 [**2 бода**].

5.



а) Без премазаних страна су по 4 (унутрашње) мале коцке у 1, 2. и 3. реду. Дакле, укупно $4 + 4 + 4 = 12$ парчића торте нема ниједну премазану страну [**7 бодова**].
б) Тачно једну премазану страну имају по $3 \cdot 2$ мале коцке на свакој бочној страни и још 4 мале коцке горње основе велике коцке, дакле укупно $4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 = 28$ парчића има тачно једну премазану страну [**6 бодова**].
в) Тачно две премазане стране имају $4 \cdot 3$ мале коцке на бочним ивицама коцке и још 8 малих коцака горње основе. Дакле, укупно $12 + 8 = 20$ парчића торте имају тачно две премазане стране [**7 бодова**].